DOI:10.13976/j.cnki.xk.1995.06.002
第 24 卷第 6 期　　信 息 与 控 制　　Vol. 24, No. 6
1995 年 12 月　　Information and Control　　Dec., 1995

时变时滞系统的H_∞鲁棒控制算法

钟　锷　褚　健
（浙江大学工业控制技术研究所　杭州　310027）

摘　要　本文以时变时滞系统为研究对象，引入H_∞扰动衰减度γ(H_∞ disturbance attenuation γ)为性能指标，设计时变对象的无记忆鲁棒控制器，使系统在固有时变特性和外部扰动影响条件下保证闭环稳定且具有H_∞扰动衰减度γ，并讨论控制律解的存在条件. 文中考虑的时滞对象具有多重状态滞后，时滞变化率小于 1.

关键词　时变时滞，H_∞扰动衰减度，Lyapunov 函数，无记忆反馈

1　引言

H_∞设计方法是 80 年代初由 Zames 提出[1]的，以H_∞范数实现对干扰最大抑制的控制器设计方法. H_∞设计方法对干扰特性的已知程度要求不高，且以H_∞范数作为性能指标较恰当地描述了系统的鲁棒稳定性，因此近年来受到很大重视. 其研究领域也从克服外部干扰，发展到抑制模型不精确及对象本身时变特性的不良影响. 文献[2－6]是近年来针对时变不确定对象，在时域讨论H_∞鲁棒控制的较有代表性的文献. 这类H_∞鲁棒控制可以在对象特性时变不确定条件下，保证将扰动影响抑制到一预定的范围内. 但它们讨论的对象均为一般无时滞系统.

时滞过程广泛存在于工业生产中，且很多是难以精确建模或本身具有时变特性的，如轧钢、输油等过程. 因此时变不确定时滞系统的鲁棒控制近年来也受到广泛的重视[7－12]. 由于有限谱配置等有记忆反馈控制律在对象特性时变不确定条件下很难判断鲁棒性，而各类无记忆反馈的闭环鲁棒性分析一般较为简明，且算法容易在线实现，因此受到更多重视. 文献[7－9]基于 Lyapunov 方法研究了时变时滞系统的无记忆反馈控制算法，不足之处在于系统性能仅仅限于保证闭环稳定，这样的控制器常常是难以满足应用要求的. 为此本文在时变时滞系统鲁棒控制中引入了H_∞扰动衰减度指标，并给出相应控制器设计方法与结论.

2　对象描述与性能指标

考虑线性时变系统(Σ)

$$\dot{x}(\tau) = Ax(t) + DF(t)\{Ex(t) + Gu(t) + \sum_{i=1}^{J} E_i x(t - \tau_i(t))\} +$$

$$Bu(t) + B_1\omega(t), \qquad t \in (0, +\infty) \tag{1a}$$

$$x(\eta) = \varphi(\eta), \qquad \eta \in (-\infty, 0] \tag{1b}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{1c}$$

其中$x(\cdot) \in R^n$, $u(\cdot) \in R^m$, $y(\cdot) \in R^p$, $\omega(\cdot) \in R^q$分别为状态，控制，输出及扰动向量. A, D, $F(\cdot)$, E, G, E_i, B, B_1, C为适当维数的系数矩阵，$\tau_i(\cdot)$为时滞，时变特性满足约束

此项研究为国家自然科学基金，霍英东青年教师基金资助课题.
1995－01－20 收稿

$$\dot{\tau}_i(t) \leqslant h_i < 1, \qquad i = 1,\cdots,J \tag{2a}$$

$$\| F(t) \| = \lambda_{\max}[(F(t)F^{\mathrm{T}}(t))^{1/2}] \leqslant 1 \tag{2b}$$

系统(Σ)是参考文献[7]的对象模型,并引入干扰作用构成的.

定义 1 如果

1) 系统(Σ)闭环内部稳定;

2) 在零初始条件

$$\varphi(\eta) = 0, \qquad \eta \in [-\max(\tau_1(0),\cdots,\tau_J(0)),0] \tag{3}$$

约束下,系统输出与扰动满足关系

$$\| y \|_2 \leqslant \gamma \| \omega \|_2, \qquad \gamma > 0 \tag{4}$$

则称系统(Σ)闭环稳定并具有H∞扰动衰减度γ.

定义1是一般无滞后系统具有H∞扰动衰减度定义[2]的直接推广,仅在零初始条件的描述上有不同.定义1在频域的意义就是从扰动到输出传递函数的H∞范数不大于γ.

3 控制器设计

无记忆反馈控制器设计如下.

定理 1 若$P \in R^{n \times n}$是方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - PHP + T = -Q \tag{5}$$

的正定解,其中

$$H = \alpha B(2I_m - \alpha G^{\mathrm{T}}G)B^{\mathrm{T}} - 3DD^{\mathrm{T}} - \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} \tag{6a}$$

$$T = C^{\mathrm{T}}C + E^{\mathrm{T}}E + J\sum_{i=1}^{J}(1-h_i)^{-1}E_i^{\mathrm{T}}E_i \tag{6b}$$

且$\alpha,\gamma \in R^+$,对称正半定矩阵$Q \in R^{n \times n}$,均由设计者选择,则控制器

$$u(t) = -\alpha B^{\mathrm{T}}Px(t) \tag{7}$$

保证系统闭环稳定并具有H∞扰动衰减度γ.

证明 构造Lyapunov函数

$$V(t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + J\sum_{i=1}^{J}\int_{t-\tau_i(t)}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)(1-h_i)^{-1}E_i^{\mathrm{T}}E_ix(s)\mathrm{d}s \tag{8}$$

将(7)式代入(1a)式得系统闭环描述为

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = (A - \alpha BB^{\mathrm{T}}P)x(t) + DF(t)\{(E - \alpha GB^{\mathrm{T}}P)x(t) + \\ \sum_{i=1}^{J}E_ix(t-\tau_i(t))\} + B_1\omega(t)\end{aligned} \tag{9}$$

a) 闭环稳定性

若$\omega(t)$为有限能量干扰,不妨设

$$\omega(t) = 0, \qquad t \in [t_0, +\infty) \tag{10}$$

将(8)式定义的Lyapunov函数沿闭环轨迹对时间求导得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P\dot{x}(t) + J\sum_{i=1}^{J}x^{\mathrm{T}}(t)(1-h_i)^{-1}E_i^{\mathrm{T}}E_ix(t) - J\sum_{i=1}^{J}x^{\mathrm{T}}(t \\ -\tau_i(t))E_i^{\mathrm{T}}E_ix(t-\tau_i(t)) \leqslant x^{\mathrm{T}}(t)\{A^{\mathrm{T}}P + PA - \alpha PB(2I_m - \alpha G^{\mathrm{T}}G)B^{\mathrm{T}}P + \\ 3PDD^{\mathrm{T}}P + E^{\mathrm{T}}E + J\sum_{i=1}^{J}(1-h_i)^{-1}E_i^{\mathrm{T}}E_i\}x(t)\end{aligned} \tag{11}$$

将(5)，(6)式代入可得

$$\dot{V}(t) \leqslant -x^{\mathrm{T}}(t)(Q+\gamma^{-2}PB_1B_1^{\mathrm{T}}P+C^{\mathrm{T}}C)x(t) < 0,\quad t\in[t_0,+\infty) \tag{12}$$

根据Lyapunov稳定判定定理，可知闭环系统在有限能量扰动下是渐近稳定的.

b) 对干扰的抑制作用

在非零扰动$\omega(t)$影响下，将(8)定义的Lyapunov函数沿(9)式确定的闭环轨迹求导可得

$$\dot{V}(t) \leqslant -x^{\mathrm{T}}(t)(Q+C^{\mathrm{T}}C)x(t)+\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t) \tag{13}$$

构造

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{\infty}[y^{\mathrm{T}}(t)y(t)-\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)+\dot{V}(t)]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}Cx(t)-\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)+\dot{V}(t)]\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{14}$$

将(13)式代入得

$$N=\int_0^{\infty}[y^{\mathrm{T}}(t)y(t)-\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)]\mathrm{d}t-V(0)+V(\infty)\leqslant-\int_0^{\infty}x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)\mathrm{d}t\leqslant 0 \tag{15}$$

又由状态零初始条件(3)得

$$V(0)=x^{\mathrm{T}}(0)Px(0)+J\sum_{i=1}^{J}\int_{\tau_i(0)}^{0}x^{\mathrm{T}}(s)(1-h_i)^{-1}E_i^{\mathrm{T}}E_ix(s)\mathrm{d}s=0 \tag{16}$$

代入(15)式，可得

$$\int_0^{\infty}[y^{\mathrm{T}}(t)y(t)-\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)]\mathrm{d}t\leqslant -V(\infty)\leqslant 0 \tag{17}$$

可见满足(4)式所定义的扰动衰减度. 由a)，b)部分结论可知，在(7)式确定的控制器作用下，系统(Σ)闭环稳定，并具有H_∞扰动衰减度γ.

定理1得证.

关于所给控制律的有解性，以下推论给出了控制器有解的两个充分条件.

推论1 若(A,B)能控，系数矩阵满足匹配条件

$$D=BR^{\mathrm{T}},\qquad B_1=BR_1^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

并可选择参数$\alpha\in R^-$使成立

$$\alpha(2I_m-\alpha G^{\mathrm{T}}G)>3R^{\mathrm{T}}R+\gamma^{-2}R_1^{\mathrm{T}}R_1 \tag{19}$$

则方程(5)必有唯一正定解$P\in R^{n\times n}$.

证明 根据匹配条件(18)式，方程(5)化为

$$A^{\mathrm{T}}P+PA-PB(2\alpha I_m-\alpha^2G^{\mathrm{T}}G-3R^{\mathrm{T}}R-\gamma^{-2}R_1^{\mathrm{T}}R_1)B^{\mathrm{T}}P=-Q-T \tag{20}$$

由(19)式可知方程(20)具有标准Riccati方程形式，根据标准Riccati方程有解性条件，结论得证.

实际应用中(18)式的匹配条件不一定满足，并考虑到直接以迭代法求解方程(5)较为繁琐，且不能保证收敛到方程的正定解，以下推论2给出一个系数矩阵范数约束形式的控制器有解的充分条件.

推论2 假设(A,B)能控，并选择

$$\alpha\in(0,\ 2\|G\|^{-2}) \tag{21}$$

则存在$P_1\in R^{n\times n}$是Riccati方程

$$A^{\mathrm{T}}P_1+P_1A-\alpha P_1B(2I_m-\alpha G^{\mathrm{T}}G)B^{\mathrm{T}}P_1+T=-Q_1 \tag{22}$$

的唯一正定解，其中 $Q_1\in R^{n\times n}$ 是由设计者选定的实对称正半定阵. 如果成立

$$3\|D\|^2+\gamma^{-2}\|B_1\|^2\leqslant\frac{\lambda_{\min}(Q_1)}{\lambda_{\max}^2(P_1)}\tag{23}$$

则说明定理 1 确定的控制律是有解的.

其中矩阵范数 $\|\cdot\|$ 的意义与(2b)中相同.

证明　据(22),(23)式有

$$A^{\mathrm{T}}P_1+P_1A-P_1HP_1+T=-[Q_1-P_1(3DD^{\mathrm{T}}+\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}})P_1]\leqslant 0\tag{24}$$

结论得证.

推论 2 实际上是给出了一个控制律求解方法，Riccati 方程(22)可按文[13]介绍的数值方法求解，若在方程(5)中取实对称正半定阵

$$Q=Q_1-P_1(3DD^{\mathrm{T}}+\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}})P_1\tag{25}$$

显然 $P=P_1$ 就是原方程的正定解.

4　结论

本文在时变时滞系统的无记忆鲁棒控制中引入 H$_\infty$ 范数指标，设计的状态反馈控制器保证系统闭环稳定并具有 H$_\infty$ 扰动衰减度 γ. 因此,与该领域现有文献[7－12]相比提高了鲁棒控制器的有效性与应用价值.

参考文献

1　Zames G. Feedback and Optimal Sensitivity, Model References Transformations, Multivariable Seminorms, and Approximate Inverse. IEEE Trans, AC,1981, **26**.

2　Lihua Xie. Robust H$_\infty$ Control for Linear Systems with Norm-Bounded Time-Varying Uncertainty. IEEE Trans, AC, 1992, **37**.

3　Xie Lihua. H$_\infty$ Control and Quadratic Stabilization of Systems with Parameter Uncertainty via Output Feedback. IEEE Trans, AC, 1992, **37**.

4　Vaidyanathan P P. The Discrete-Time Bounded-Real Lemma in Digital Filtering. IEEE Trans, CS, 1985, **32**.

5　Khargonekar P P. Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stability and H$_\infty$ Control Theory. IEEE Trans, AC, 1990, **35**.

6　Souza C E de. H$_\infty$ Analysis and Synthesis of Discrete-Time Systems with Time-Varying Uncertainty. IEEE Trans, AC, 1993, **38**.

7　Phoojaruenchanachai Suthee. Memoryless Stabilization of Uncertain Linear Systems Including Time-Varying State Delays. IEEE Trans, AC, 1992, **37**.

8　Feliachi Ali. Memoryless Stabilization of Linear Delay Differential Systems. IEEE Trans, AC, 1981, **26**.

9　Sinha A S C. Stabilization of Time-Varying Infinite Delay Control Systems. IEE-D, 1993, **140**(1).

10　Tsypkin Ya Z. Robust Stability of Time-Delay Systems with an Uncertain Time-Delay Constant. Int J Contr, 1993, **57**(4).

11　Su Te-Jen Robust Stability for Linear Time-Delay Systems with Linear Parameter Perturbations. Int J Syst Sci, 1988, **19**(10).

12　Shen Jiang-Chung. Memoryless Stabilization of Uncertain Dynamic Delay Systems: Riccati Equation Approach. IEEE Trans, AC, 1991, **36**.

(下转第 337 页)

A SIMPLE METHOD OF POLE PLACEMENT FOR MULTI-VARIABLE LINEAR SYSTEMS

LIAO Fucheng
(Beijing University of Science and Technology, China)
Takeshi Tsuchiya　Tadashi Egami
(Hokkaido University, Japan) (Kanagawa University, Japan)

Abstract A new method to place pole for multi-input and/or multi-output linear systems is proposed in this paper. By the method, multi-input and/or multi-output linear systems can be carried out pole placement like single-input and single-ouput linear systems, so as to place pole of observers.

Key words feedback control system, linear system, pole placement, state observer

（廖福成，男，39 岁，硕士，副教授. 研究领域为非线性系统及预见控制系统的研究.）

（土谷武士，男，54 岁，博士，教授. 研究领域为机器人控制、机电一体化理论及预见控制理论的研究.）

（江上正，男，37 岁，　博士，副教授. 研究领域为机电一体化理论与预见控制理论的研究.）

（上接第 329 页）

H_∞ ROBUST CONTROL FOR TIME-VARYING DELAY SYSTEMS

ZHONG E　CHU Jian
(Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University)

Abstract This paper studies time-varying systems with multi-delays in state. The H_∞ disturbance attenuation γ is introduced as the performance norm firstly. Then a memoryless feedback controller is designed to ensure that the close-loop system is stable with H_∞ disturbance attenuation γ. The condition under which the controller exists is discussed also.

Key words time-varying delay, H_∞ disturbance attenuation, Lyapunov function, memoryless feedback

（钟　锷，男，25 岁，硕士. 研究领域为现代控制理论的应用.）

（褚　健，32 岁，博士导师，教授. 研究领域为时滞系统控制、非线性控制、鲁棒控制等理论与应用.）